Concours A2GP session 2016

Composition : **Mathématiques 6** (statistiques, probabilités)

Durée : **2 Heures**

Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants

Exercice 1:

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2. Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes, elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac S mentionné ci-dessus.

Partie A :

1) On extrait deux jetons simultanément de S. Calculer la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2.

2) Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants). On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2 .

a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Justifier la réponse.

b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de X.

Partie B :

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.

1) **a)** Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi usuelle que l'on précisera.

b) En déduire la loi de probabilité de Y.

2) **a)** Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z.

b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

Partie C :

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S. On désigne par X_1 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés, et par X_2 la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

1) Donner la loi de probabilité du couple (X_1, X_2) en utilisant un tableau à double entrée.

2) En déduire la loi de probabilité de X_1 et celle de X_2.

3) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2:

Une puce se déplace indéfiniment entre trois points A, B et C. Au départ (étape 0), elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points.

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ modélisant cette suite infinie de déplacements. Pour tout entier naturel n, on considère l'événement A_n (respectivement B_n ; C_n) : "la puce est en A (respectivement B ; C)" à l'issue de la n-ème étape, et la probabilité α_n (respectivement β_n et λ_n) de l'événement A_n (respectivement B_n et C_n).

On pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \lambda_0 = 0$.

1)a) Justifier que pour tout entier naturel n, A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements . Et en déduire que $\alpha_n + \beta_n + \lambda_n = 1$.

b) Donner, pour tout entier naturel n, les probabilités conditionnelles $P(A_{n+1} / A_n)$, $P(A_{n+1} / B_n)$, $P(A_{n+1} / C_n)$, $P(B_{n+1} / A_n)$, $P(B_{n+1} / B_n)$, $P(B_{n+1} / C_n)$, $P(C_{n+1} / A_n)$, $P(C_{n+1} / B_n)$, $P(C_{n+1} / C_n)$.

2)a) Calculer α_1, β_1, λ_1 et α_2, β_2, λ_2.

b) Démontrer que pour tout naturel n, $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\lambda_n \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\lambda_n \\ \lambda_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n \end{cases}$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta_n = \lambda_n$ et $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \alpha_n)$.

d) En déduire l'expression de α_n , puis de β_n et λ_n , en fonction de n.

e) En déduire la limite de α_n , β_n et λ_n lorsque n tend vers . Interpréter ces résultats.